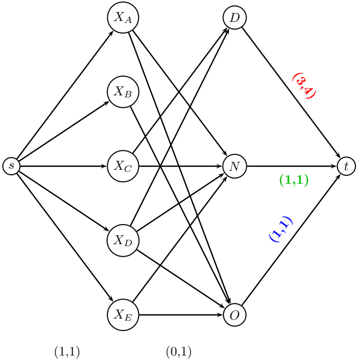
Arcs de violation pour la mesure μ^{Σ}_{dec}

Activité	min	max
Escalade	3	4
Piscine	1	1
Sieste	1	1

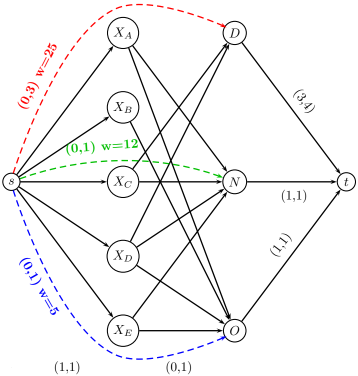


Arcs de violation pour la mesure μ_{dec}^{Σ}

Arcs de violation : manque

$\forall v_j \in Doms$, $a{=}(s \rightarrow v_j)$ avec $d(a){=}0$, $c(a){=}l_j$ et $w(a){=}\varphi_j^{atleast}$

coût	embauche	sur-encadrement
Escalade	25	10
Piscine	12	7
Sieste	5	1



Arcs de violation pour la mesure μ_{dec}^{Σ}

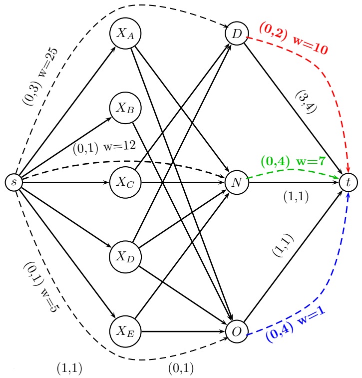
Arcs de violation : manque

$\forall v_j \in Doms$, $a{=}(s \rightarrow v_j)$ avec $d(a){=}0$, $c(a){=}l_j$ et $w(a){=}\varphi_j^{atleast}$

Arcs de violation : excès

$\forall v_j \in Doms$, $a{=}(v_j \rightarrow t)$ avec $d(a){=}0$, $c(a){=}\delta^+(v_j)$ et $w(a){=}\varphi_j^{atmost}$

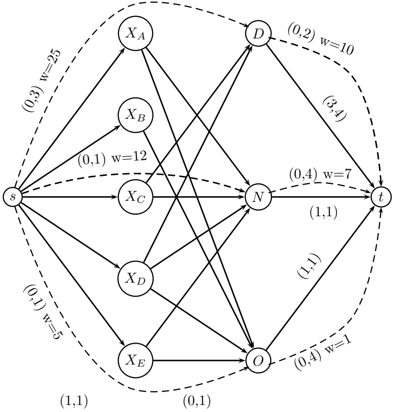
coût	embauche	sur-encadrement
Escalade	25	10
Piscine	12	7
Sieste	5	1



Σ-Gcc(μ_{dec}^{Σ}) : Test de cohérence

Cohérence de Σ-Gcc($\mathcal{X}, l, u, \varphi^{atleast}, \varphi^{atmost}, z$)

Σ-Gcc($\mathcal{X}, l, u, \varphi^{atleast}, \varphi^{atmost}, z$) admet une solution *ssi* il existe un flot faisable f dans le réseau associé t.q. $weight(f) \leq \max(D_z)$.

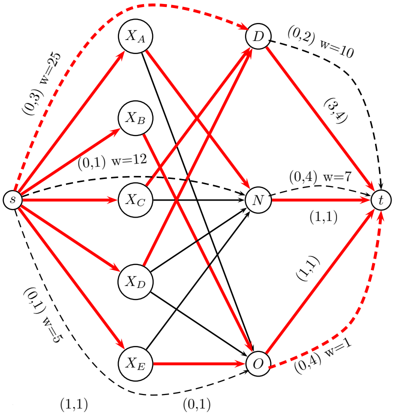


$\max(D_z) = 30$

Σ-Gcc(μ^{Σ}_{dec}) : Test de cohérence

Cohérence de Σ-Gcc$(\mathcal{X}, l, u, \varphi^{atleast}, \varphi^{atmost}, z)$

Σ-Gcc$(\mathcal{X}, l, u, \varphi^{atleast}, \varphi^{atmost}, z)$ admet une solution *ssi* il existe un flot faisable f dans le réseau associé t.q. $weight(f) \leq \max(D_z)$.

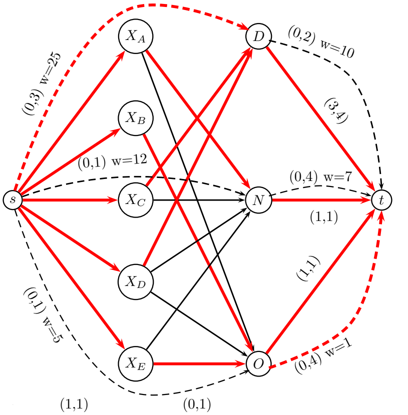


$\max(D_z) = 30$
$weight(f)$=26
La contrainte est cohérente.

Σ-Gcc(μ^{Σ}_{dec}) : Test de cohérence

Cohérence de Σ-Gcc$(\mathcal{X}, l, u, \varphi^{atleast}, \varphi^{atmost}, z)$

Σ-Gcc$(\mathcal{X}, l, u, \varphi^{atleast}, \varphi^{atmost}, z)$ admet une solution *ssi* il existe un flot faisable f dans le réseau associé t.q. $weight(f) \leq \max(D_z)$.



$\max(D_z) = 30$

$weight(f)$=26

La contrainte est cohérente.

$\{(X_A{=}\mathbf{P}),(X_B,{=}\mathbf{S}),(X_C{=}\mathbf{E}),(X_D{=}\mathbf{E}),(X_E{=}\mathbf{S})\}$

Σ-Gcc(μ^{Σ}_{dec}) : Filtrage

Viabilité de (X_i, d_j) pour Σ–Gcc(μ^{Σ}_{dec})

Une valeur (X_i, d_j) est viable *ssi* il existe un flot faisable f utilisant l'arc $(X_i \rightarrow d_j)$ et de poids $weight(f) \leq max(D_z)$.

Relaxation de la contrainte Regular

La contrainte Regular

Définition (Automate fini déterministe)

Un automate fini déterministe (DFA) Π *est un quintuplet* $(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *avec* Q *un ensemble fini d'états,* Σ *un alphabet,* $\delta : Q \times \Sigma \rightarrow Q$ *un ensemble de transitions,* q_0 *un état initial et* $F \subseteq Q$ *un ensemble d'états finaux.*

Définition (Pesant, 2004)

Soit Π=$(Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ *un automate fini déterministe et* $X = \{x_1, ..., x_n\}$ *un ensemble de variables de domaine* $D_1, ..., D_n \subseteq \Sigma$*, la contrainte* `Regular`$(X, \Pi)$ *impose que la séquence des valeurs de* X *appartient au langage régulier reconnu par* Π.

Représentation sous la forme d'un réseau

La contrainte Regular(X, Π) peut être représentée sous forme d'un graphe en couches $\mathcal{R} = \{\mathcal{V}, \mathcal{A}\}$, avec

Représentation sous la forme d'un réseau

La contrainte $\texttt{Regular}(X, \Pi)$ peut être représentée sous forme d'un graphe en couches $\mathcal{R} = \{\mathcal{V}, \mathcal{A}\}$, avec

$$V = \{s\} \cup V_0 \cup \ldots \cup V_n \cup \{t\},\ A = A_s \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_t$$

avec

$$\forall i \in [0..n],\ \ V_i = \{q_l^i \mid q_l \in Q\}$$

$$A_s = \{(s \rightarrow q_0^0)\}$$

$$\forall i \in [1..n],\ \ A_i = \{(q_l^{i-1} \rightarrow q_m^i, d_j) \mid d_j \in D_i \text{ et } \delta(q_l, d_j) = q_m\}$$

$$A_t = \{(q_l^n \rightarrow t) \mid q_l \in F\}$$

Représentation sous la forme d'un réseau

La contrainte $\texttt{Regular}(X, \Pi)$ peut être représentée sous forme d'un graphe en couches $\mathcal{R} = \{\mathcal{V}, \mathcal{A}\}$, avec

$$V = \{s\} \cup V_0 \cup \ldots \cup V_n \cup \{t\},\ A = A_s \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup A_t$$

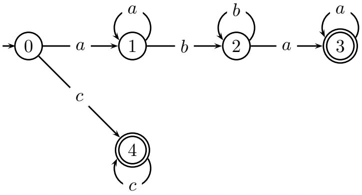
avec

$$\forall i \in [0..n],\ \ V_i = \{q_l^i \mid q_l \in Q\}$$
$$A_s = \{(s \rightarrow q_0^0)\}$$
$$\forall i \in [1..n],\ \ A_i = \{(q_l^{i-1} \rightarrow q_m^i, d_j) \mid d_j \in D_i \text{ et } \delta(q_l, d_j) = q_m\}$$
$$A_t = \{(q_l^n \rightarrow t) \mid q_l \in F\}$$

- Chaque couche représente une variable ;
- Le sommet q_l^i représente l'état q_l associé à la i-ième couche ;
- Les arcs représentent les transitions de l'automate.

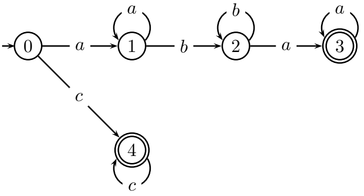
Exemple de contrainte Regular

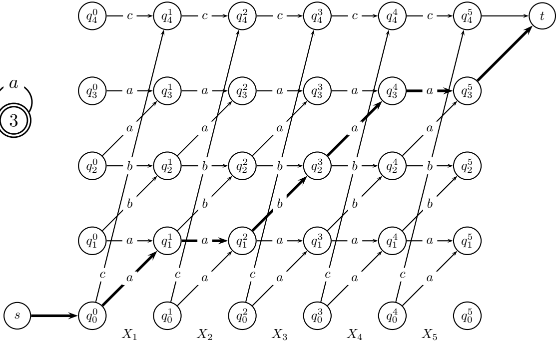
Soit l'automate Π, l'ensemble des variables $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et la contrainte `Regular`(X,Π), avec $D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = D_{x_4} = D_{x_5} = \{a, b, c\}$



Exemple de contrainte Regular

Soit l'automate Π, l'ensemble des variables $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ et la contrainte Regular(X,Π), avec $D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = D_{x_4} = D_{x_5} = \{a, b, c\}$





Regular(X, Π) : Test de cohérence

Une solution pour la contrainte globale Regular(X, Π) correspond à un s–t chemin dans le graphe en couches.

Théorème (Test de cohérence de Regular(X, Π))

Une contrainte Regular(X, Π) *admet une solution ssi il existe au moins un s–t chemin dans le graphe en couches associé.*

Regular(X, Π) : Test de cohérence

Une solution pour la contrainte globale Regular(X, Π) correspond à un s–t chemin dans le graphe en couches.

Théorème (Test de cohérence de Regular(X, Π))

Une contrainte Regular(X, Π) admet une solution ssi il existe au moins un s–t chemin dans le graphe en couches associé.

- $\{s, q_0^0, a, q_1^1, a, q_1^2, b, q_2^3, a, q_3^4, a, q_3^5, t\}$ est **un s–t chemin**.
- Elle représente le mot **"aabaa"** reconnu par l'automate Π.
- L'instanciation complète $\{(x_1 = a), (x_2 = a), (x_3 = b), (x_4 = a), (x_5 = a)\}$ est bien **solution** pour la contrainte Regular(X, Π) de l'exemple.

Regular(X, Π) : Filtrage

Théorème (Viabilité de (X_i, d_j) pour Regular(X, Π))

Une valeur (X_i, d_j) est viable ssi il existe au moins un s–t chemin passant par un arc reliant les couches $(i-1)$ et i étiqueté par la valeur d_j.

Regular(X, Π) : Filtrage

Théorème (Viabilité de (X_i, d_j) pour Regular(X, Π))

Une valeur (X_i, d_j) est viable ssi il existe au moins un s–t chemin passant par un arc reliant les couches $(i-1)$ et i étiqueté par la valeur d_j.

$\rightarrow$ Approche naive : calculer $(n \times |Q| \times |\Sigma|)$ chemins au sein du graphe en couches pour établir la cohérence globale.

Regular(X, Π) : Filtrage

Théorème (Viabilité de (X_i, d_j) pour Regular(X, Π))

Une valeur (X_i, d_j) est viable ssi il existe au moins un s–t chemin passant par un arc reliant les couches $(i-1)$ et i étiqueté par la valeur d_j.

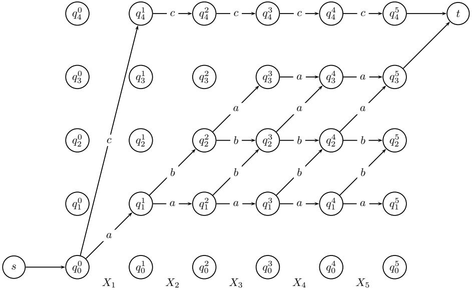
$\rightarrow$ Approche naive : calculer $(n \times |Q| \times |\Sigma|)$ chemins au sein du graphe en couches pour établir la cohérence globale.

$\rightarrow$ Autre approche : construire un graphe en couches **réduit**, où seuls les arcs appartenant à un s–t chemin sont conservés.

Construction du graphe en couches réduit

Deux phases :

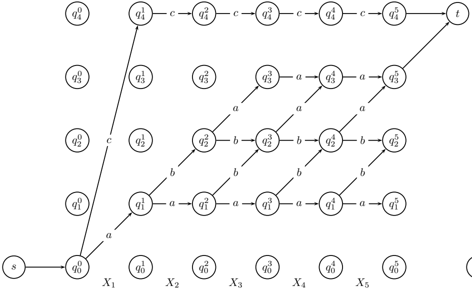
> phase **ascendante**, duplique les transitions mais seuls les arcs accessibles à partir de s sont construits.

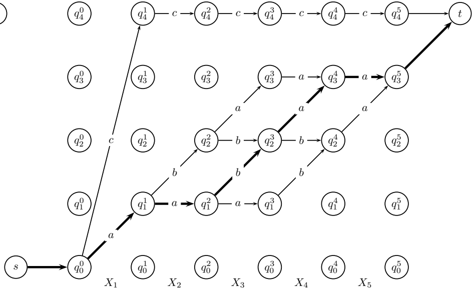


Construction du graphe en couches réduit

Deux phases :

phase **descendante**, élimine tous les arcs non connectés à t en parcourant de droite à gauche le graphe en couches.

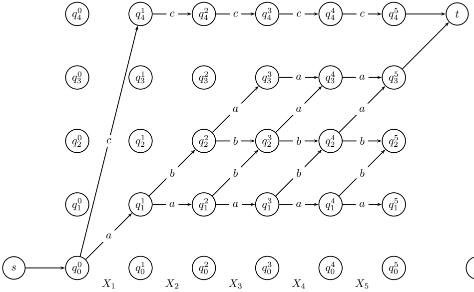


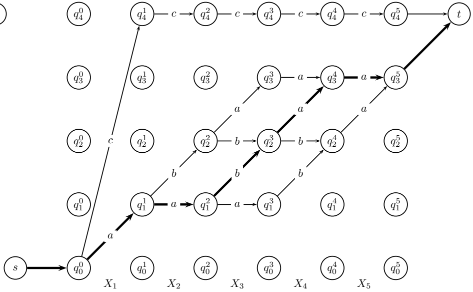


Construction du graphe en couches réduit

Deux phases :

→ Test de cohérence : **vérifier l'existence d'au moins un arc dans A_1**.





Deux sémantiques associées à deux distances entre mots [Hoeve, 06] :

- la distance de Hamming ;
- la distance d'édition.

Distance de Hamming $\mathcal{H}(m_1, m_2)$: mesure pour deux mots de même longueur le nombre de symboles qui diffèrent.

Sémantique de violation basée variables pour Regular(X, Π)

$$\mu_{var}(X) = min\{\mathcal{H}(D, X) \mid D = D_{x_1} \times ... \times D_{x_n} \text{ t.q. } D \in L(\Pi)\}$$

Relaxation de Regular sans préférences

Deux sémantiques associées à deux distances entre mots [Hoeve, 06] :

- la distance de Hamming ;
- la distance d'édition.

Distance d'édition $\mathcal{E}(m_1, m_2)$: mesure le nombre minimal d'opérations élémentaires qu'il est nécessaire d'appliquer pour transformer le mot m_1 en le mot m_2.

Sémantique de violation basée édition pour Regular(X, Π)

$$\mu_{edit}(X) = min\{\mathcal{E}(D, X) \mid D = D_{x_1} \times ... \times D_{x_n} \text{ t.q. } D \in L(\Pi)\}$$

Arcs de violation pour la mesure μ_{var}

$\mathcal{X}=\{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
$D_{x_1}=D_{x_2}=D_{x_4}=D_{x_5} = \{a, b, c\}$,
$D_{x_3} = \{a, b\}, \quad D_z = \{0, 1\}$
$\mathcal{C}=\{\texttt{Regular}(X, \Pi, \mu, z)\}$

Arcs de violation pour la mesure μ_{var}

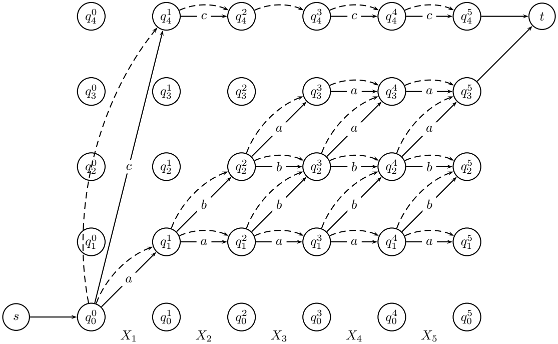
Arcs de violation pour Soft-Regular(x, Π, μ_{var}, z)

$$\tilde{A}_{subs} = \{(q_l^{i-1} \rightarrow q_m^i) \mid \delta(q_l, d_j) = q_m, i = 1, ..., n\}$$

avec

$$\forall a \in \tilde{A}_{subs},\ w(a) = 1 \text{ et étiqueté par } \Sigma \backslash d_j$$

$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_4} = D_{x_5} = \{a, b, c\}$,
$D_{x_3} = \{a, b\}$, $D_z = \{0, 1\}$
$\mathcal{C} = \{\texttt{Regular}(X, \Pi, \mu, z)\}$

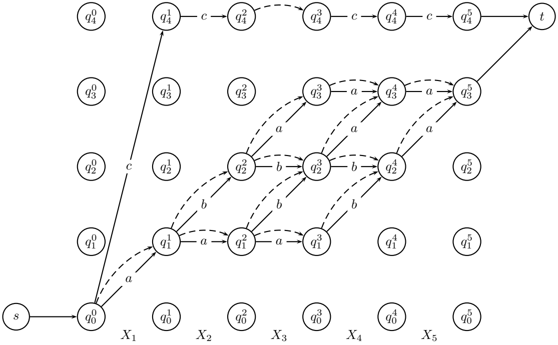


Arcs de violation pour la mesure μ_{var}

Arcs de violation pour Soft-Regular(x, Π, μ_{var}, z)

$$\tilde{A}_{subs} = \{(q_l^{i-1} \to q_m^i) \mid \delta(q_l, d_j) = q_m, i = 1, \ldots, n\}$$
avec
$$\forall a \in \tilde{A}_{subs},\ w(a) = 1 \text{ et étiqueté par } \Sigma \backslash d_j$$

$\mathcal{X} = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$
$D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_4} = D_{x_5} = \{a, b, c\}$,
$D_{x_3} = \{a, b\}$, $D_z = \{0, 1\}$
$\mathcal{C} = \{\texttt{Regular}(X, \Pi, \mu, z)\}$



Test de cohérence

Cohérence de Soft-Regular(X, Π, μ_{var}, z)

La contrainte Soft-Regular(X, Π, μ_{var}, z) admet une solution *ssi* il existe un s–t chemin p dans le graphe en couches associé de poids $weight(p)$ inférieur ou égal à $max(D_z)$.

Filtrage

Viabilité de (x_i, d_j) pour $\texttt{Soft-Regular}(X, \Pi, \mu_{var}, z)$

la valeur (x_i, d_j) est viable *ssi* il existe au moins un arc reliant les couches $(i - 1)$ et i étiqueté par d_j dans le graphe en couches associé.

Relaxation de Regular avec préférences (Métivier, Boizumault, Loudni, 2009)

Deux sémantiques de violation :

- la sémantique basée valeurs avec préférences (μ^{Σ}_{val}) utilisant une version pondérée de la distance de Hamming ;
- la sémantique basée édition avec préférences (μ^{Σ}_{edit}) utilisant une version pondérée de la distance d'édition.

Distance de Hamming pondérée $\mathcal{H}^{w}(m_1, m_2)$: mesure pour deux mots de même longueur, la somme des poids φ_{ab} des symboles qui diffèrent à une même position.

Sémantique de violation basée valeurs avec préférences pour $\texttt{Regular}(X, \Pi)$

$$\mu^{\Sigma}_{val}(X) = min\{\mathcal{H}^{w}(D, X) \mid D = D_{x_1} \times ... \times D_{x_n} \text{ t.q. } D \in L(\Pi)\}$$

Relaxation de Regular avec préférences (Métivier, Boizumault, Loudni, 2009)

Deux sémantiques de violation :

- la sémantique basée valeurs avec préférences (μ_{val}^{Σ}) utilisant une version pondérée de la distance de Hamming ;
- la sémantique basée édition avec préférences (μ_{edit}^{Σ}) utilisant une version pondérée de la distance d'édition.

Distance d'édition pondérée $\mathcal{E}^w(m_1, m_2)$: mesure pour deux mots la somme minimale des poids des opérations nécessaires pour transformer le mot m_1 en le mot m_2.

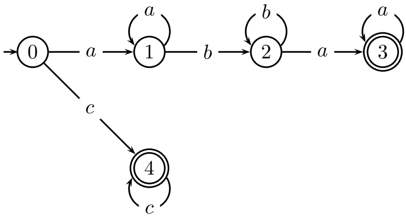
Sémantique de violation basée édition avec préférences pour $\texttt{Regular}(X, \Pi)$

$$\mu_{edit}^{\Sigma}(X) = min\{\mathcal{E}^w(D, X) \mid D = D_1 \times ... \times D_n \text{ t.q. } D \in L(\Pi)\}$$

Exemple de contrainte Σ-Regular

Soit la contrainte $\Sigma\text{-}\mathtt{Regular}(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$ portant sur l'ensemble $X = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ ayant pour domaines $D_{x_1} = D_{x_2} = D_{x_3} = \{a, b, c\}$, $D_{x_4} = \{a, b\}$, $D_{x_5} = \{b, c\}$ et $D_{x_z} = [0..4]$.

m_1 \ m_2	a	b	c
a	–	1	4
b	3	–	2
c	5	9	–



Arcs de violation pour la mesure μ_{val}^{Σ}

m_1 \ m_2	a	b	c
a	–	1	4
b	3	–	2
c	5	9	–

Arcs de violation pour la mesure μ^{Σ}_{val}

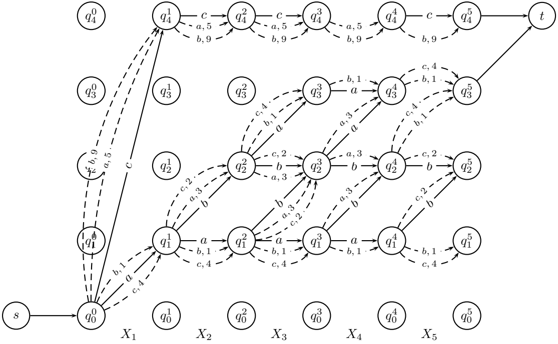
Arcs de violation pour Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$

$A^{\Sigma}_{subs} = \{(q^{i-1}_l \to q^i_m) \mid \delta(q_l, d_j) = q_m,\ d_k \in D_{x_i} \backslash \{d_j\},\ i = 1, ..., n\}$

Soit a un arc représentant la substitution de d_j *par* d_k

alors a est étiqueté par d_k et $w(a) = \varphi_{d_j, d_k}$

m_1 \ m_2	a	b	c
a	–	1	4
b	3	–	2
c	5	9	–



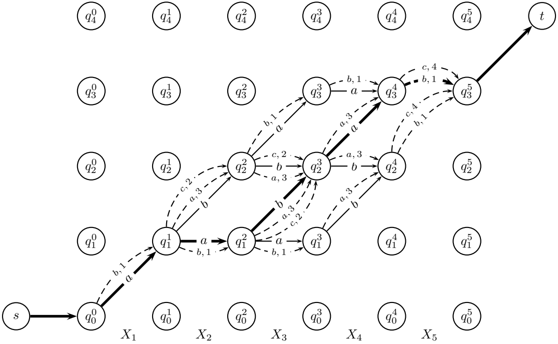
Arcs de violation pour la mesure μ_{val}^{Σ}

Arcs de violation pour Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu_{val}^{\Sigma}, z)$

$$A_{subs}^{\Sigma} = \{(q_l^{i-1} \rightarrow q_m^i) \mid \delta(q_l, d_j) = q_m,\ d_k \in D_{x_i} \backslash \{d_j\},\ i = 1, ..., n\}$$

Soit a un arc représentant la substitution de d_j *par* d_k
alors a est étiqueté par d_k et $w(a) = \varphi_{d_j, d_k}$

m_1 \ m_2	a	b	c
a	–	1	4
b	3	–	2
c	5	9	–



Test de cohérence de Σ-Regular

Cohérence de Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu_{val}^{\Sigma}, z)$

La contrainte Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu_{val}^{\Sigma}, z)$ admet une solution *ssi* il existe un s–t chemin p dans le graphe en couches associé de poids $weight(p)$ inférieur ou égal à $\max(D_z)$.

Test de cohérence de Σ-Regular

Cohérence de Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$

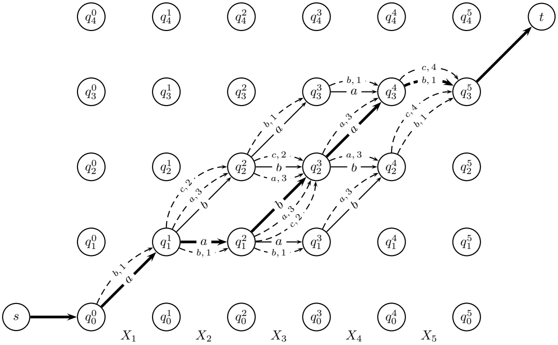
La contrainte Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$ admet une solution *ssi* il existe un s–t chemin p dans le graphe en couches associé de poids $weight(p)$ inférieur ou égal à $\max(D_z)$.

$$\max(D_z) = 4$$

Test de cohérence de Σ-Regular

Cohérence de Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$

La contrainte Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$ admet une solution *ssi* il existe un s–t chemin p dans le graphe en couches associé de poids $weight(p)$ inférieur ou égal à $\max(D_z)$.



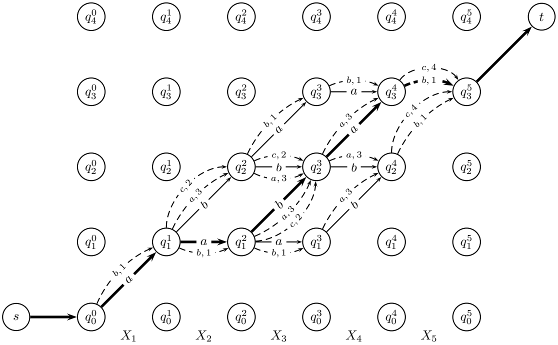
$\max(D_z) = 4$

Solution : $\{(x_1 = a), (x_2 = a), (x_3 = b), (x_4 = a), (x_5 = b)\}$

Test de cohérence de Σ-Regular

Cohérence de Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$

La contrainte Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$ admet une solution *ssi* il existe un s–t chemin p dans le graphe en couches associé de poids $weight(p)$ inférieur ou égal à $\max(D_z)$.



$\max(D_z) = 4$

Solution : $\{(x_1 = a), (x_2 = a), (x_3 = b),$
$(x_4 = a), (x_5 = b)\}$

$weight(f) = 1$

Filtrage de Σ-Regular

Viabilité de (X_i, d_j) pour Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$

Une valeur (x_i, d_j) est viable *ssi* il existe au moins un chemin p reliant s à t dans le graphe en couches associé de poids inférieur ou égal à $max(D_z)$ et utilisant un arc étiqueté par d_j reliant les couches V_{i-1} et V_i.

La contrainte Cost-Regular(X, Π, z)

Cost-Regular(X, Π, z) (Demassey,06)

Soit z une variable objectif et Π un automate dont les transitions sont pondérées, la contrainte Cost-Regular(X, Π, z) admet une solution *ssi* il existe une instanciation complète $\mathcal{A}$ telle que la contrainte Regular(X, Π) est cohérente et que la somme des coûts des transitions utilisées par $\mathcal{A}$ soit inférieure ou égale à $max(D_z)$.

Le graphe en couches de Cost-Regular(X, Π, z) est obtenu de la même manière que pour Regular(X, Π), mais en ajoutant aux arcs des poids correspondant à ceux des transitions associées.

L'existence d'un s–t chemin de **poids inférieur ou égal à $max(D_z)$** permet de tester la cohérence de la contrainte.

Exprimer Σ-Regular avec Cost-Regular

Soit l'automate Π associé à la contrainte Σ-Regular$(X, \Pi, W, \mu^{\Sigma}_{val}, z)$.

- La relaxation de Regular(X, Π) (selon μ^{Σ}_{val}) peut s'exprimer à l'aide d'un Cost-Regular(X, Π, z), en ajoutant à Π des **transitions représentant les différentes substitutions possibles**.
- Soit Π' ce nouvel automate ainsi obtenu.
- La contrainte Cost-Regular(X, Π', z) est une relaxation de Regular(X, Π) selon μ^{Σ}_{val}.

Nurse Rostering Problems (NRPs)

Nurse Rostering Problem (NRP)

Sur une période de temps donnée, affecter des équipes aux infirmières d'un service, tout en respectant un ensemble de règles d'intégrité et de règles de préférence.

- Règles issues de la législation du travail, des besoins des hôpitaux ou des préférences émises par le personnel hospitalier.
- Problèmes :
  - intensivement étudiés en RO et en IA,
  - difficiles à modéliser,
  - sur-contraints,
  - NP-complets.
- Site ASAP de l'Université de Nottingham.

L'instance Valouxis *(in extenso)*

- 16 nurses, 4 weeks,
- 3 shifts : D (Morning), E (Evening) and N (Night).

1. **Hard constraints :**
   - (H1) From Monday to Friday, D, E and N shifts require respectively (4,4,2) nurses.
   - (H2) For weekend, D, E and N shifts require respectively (3,3,2) nurses.
2. **Soft constraints :**
   - (S1) For each nurse, the number of D shifts should be within the range [5..8].
   - (S2) For each nurse, the number of E shifts should be within the range [5..8].
   - (S3) For each nurse, the number of N shifts should be within the range [2..4].
   - (S4) Each nurse must have at least 10 days Off.
   - (S1..S4) Any deviation δ is penalised by a cost $\delta \times 1000$.
   - (S5) Each nurse must have at most 13 days Off. Any excess δ generates a cost $\delta \times 100$.
   - (S6) Over a period of 4 weeks, each nurse must have at least 1 free Sunday. Any violation of this rule is penalised by a cost 1000.
   - (S7) Each nurse should not work more than 3 consecutive N shifts. Any excess δ generates a cost $\delta \times 1000$.
   - (S8) Shift changes must be performed respecting the order : D, E, N. Any violation of this rule is penalised by a cost 1000.
   - (S9) Each isolated working day is penalised by a cost 1000.
   - (S10) Each isolated day off is penalised by a cost 1000.
   - (S11) Each nurse should work 4 consecutive days. Any excess δ generates a cost $\delta \times 1000$. Any shortage δ generates a cost $\delta \times 20$.

Exemple de solution pour Valouxis

				1							2							3							4			
	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S	M	T	W	T	F	S	S
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
Nurse 1	D	D	D	D				E	N	N	N				D	D	D	N					E	E	E	E		
Nurse 2	N	N			E	E	N	N			D	D	D	D			E	E	E	E			D	D	D	D		
Nurse 3	D	D			D	D	D	E				E	E	E	E			D	D	D	N			E	E	E	N	
Nurse 4	E	E	E	E			E	E	E	N			D	D	D	D										D	N	N
Nurse 5	E	N	N	N				D	D	D	D				D	D	D	D				E	E	E	E			
Nurse 6	E	E	N			D	D	D	N							E	E	E	E			D	D	D	E			E
Nurse 7	E			D	D	D	E			D	D	D	N			E	E	E	E				E	E	N	N		
Nurse 8	D				E	E	E	E			D	E	E	N			D	D	N	N			D	D	N	N		
Nurse 9	D	D	D	D			D	D	D	D			E	E	E	N			E	E	E	N						
Nurse 10	N							D	D	D	E			E	E	N	N			D	D	D	N			E	E	E
Nurse 11		D	D	D	D				D	E	E	E			E	E	E	E			D	D	E	N			D	N
Nurse 12			D	N	N	N			E	E	E	E			D	D	D	D			D	E	N	N			E	E
Nurse 13			E	E	E	E			E	E	E	N				E	N	N	N			D	D	D	D			D
Nurse 14		E	E	E	E				E	E	N	N							D	N	N	N			D	D	D	D
Nurse 15		E	E	E	N							D	N	N	N				D	D	E	E				D	D	D
Nurse 16					D	N	N	N				D	D	D	N				D	E	E	E			D	E	E	

Une solution optimale de coût 20.

Modélisation sous forme de CSP (Métivier, Boizumault, Loudni, 2009)

Variables et Domaines

- I=[1..16], ensemble des infirmières,
- J=[1..28], période de 4 semaines,
- X_j^i variable représentant l'équipe affectée à l'infirmière i pour le jour j,
- $D_j^i = Doms = \{D, E, N, O\}$.

Contraintes

- gcc(X,[$l_1, ..., l_k$],[$u_1, ..., u_k$]) admet une solution ssi il existe une instanciation complète de X tq toute valeur $v_j \in Doms$ apparaisse au moins l_j fois et au plus u_j fois.
- $\Sigma -$ Gcc(X,[$l_1, ..., l_k$],[$u_1, ..., u_k$], [$\phi_1^m, ..., \phi_k^m$], [$\phi_1^e, ..., \phi_k^e$], Z) admet une solution ssi il existe une instanciation complète de X de coût inférieur à $\max(D_Z)$.

Règles sur les équipes

(H1) Du lundi au vendredi, les équipes **D**, **E** et **N** sont respectivement composées de **4**, **4**, et **2** infirmières.

$$\forall j \in\in [1,2,3,4,5,8,9,...,24,25,26],\ \mathrm{Gcc}(\{X_j^1,...,X_j^{16}\},\ [\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{2},\mathbf{0}],\ [\mathbf{4},\mathbf{4},\mathbf{2},\mathbf{16}]).$$

(H2) Durant un week-end, les équipes **D** , **E** et **N** sont composées de *(3,3,2) infirmières*.

$$\forall j \in [6,7,13,14,20,21,27,28],\ \mathrm{Gcc}(\{X_j^1,...,X_j^{16}\},\ [\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{0}],\ [\mathbf{3},\mathbf{3},\mathbf{2},\mathbf{16}]).$$

Règles sur les charges de travail

Spécification

- (S1) Chaque infirmière doit travailler en équipe **D** entre **5** et **8** fois.
- (S2) Chaque infirmière doit travailler en équipe **E** entre **5** et **8** fois.
- (S3) Chaque infirmière doit travailler en équipe **N** entre **2** et **4** fois.
- (S4) Chaque infirmière doit avoir **au moins 10 jours de repos**.
- Pour S1..S4, tout écart δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{1000}$.
- (S5) Chaque infirmière doit avoir **au plus 13 jours de repos**. Tout excès δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{100}$.

Modélisation

Règles sur les charges de travail

Spécification

- (S1) Chaque infirmière doit travailler en équipe **D** entre **5** et **8** fois.
- (S2) Chaque infirmière doit travailler en équipe **E** entre **5** et **8** fois.
- (S3) Chaque infirmière doit travailler en équipe **N** entre **2** et **4** fois.
- (S4) Chaque infirmière doit avoir **au moins 10 jours de repos**.
- Pour S1..S4, tout écart δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{1000}$.
- (S5) Chaque infirmière doit avoir **au plus 13 jours de repos**. Tout excès δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{100}$.

Modélisation

(S1..5) $\forall i \in I$, $\Sigma\text{–}\mathtt{Gcc}([X_1^i, \ldots, X_{28}^i], [\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{10}], [\mathbf{8}, \mathbf{8}, \mathbf{4}, \mathbf{13}],$

Règles sur les charges de travail

Spécification

- (S1) Chaque infirmière doit travailler en équipe **D** entre **5** et **8** fois.
- (S2) Chaque infirmière doit travailler en équipe **E** entre **5** et **8** fois.
- (S3) Chaque infirmière doit travailler en équipe **N** entre **2** et **4** fois.
- (S4) Chaque infirmière doit avoir **au moins 10 jours de repos**.
- Pour S1..S4, tout écart δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{1000}$.
- (S5) Chaque infirmière doit avoir **au plus 13 jours de repos**. Tout excès δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{100}$.

Modélisation

(S1..5) $\forall i \in I$, $\Sigma-\mathtt{Gcc}([X_1^i, \ldots, X_{28}^i], [\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{10}], [\mathbf{8}, \mathbf{8}, \mathbf{4}, \mathbf{13}],$
$[\mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}], [\mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{100}], \mathbf{Z_i^{\alpha}})$.

Règles sur les charges de travail

Spécification

- (S1) Chaque infirmière doit travailler en équipe **D** entre **5** et **8** fois.
- (S2) Chaque infirmière doit travailler en équipe **E** entre **5** et **8** fois.
- (S3) Chaque infirmière doit travailler en équipe **N** entre **2** et **4** fois.
- (S4) Chaque infirmière doit avoir **au moins 10 jours de repos**.
- Pour S1..S4, tout écart δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{1000}$.
- (S5) Chaque infirmière doit avoir **au plus 13 jours de repos**. Tout excès δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{100}$.
- (S6) Chaque infirmière doit avoir **au moins 1 dimanche de repos**. Toute violation est pénalisé d'un coût **1000**.

Modélisation

(S1..5) $\forall i \in I$, $\Sigma\!-\!\mathtt{Gcc}([X_1^i, \ldots, X_{28}^i], [\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{10}], [\mathbf{8}, \mathbf{8}, \mathbf{4}, \mathbf{13}],$
$[\mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}], [\mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{100}], \mathbf{Z_i^{\alpha}})$.

Règles sur les charges de travail

Spécification

- (S1) Chaque infirmière doit travailler en équipe **D** entre **5** et **8** fois.
- (S2) Chaque infirmière doit travailler en équipe **E** entre **5** et **8** fois.
- (S3) Chaque infirmière doit travailler en équipe **N** entre **2** et **4** fois.
- (S4) Chaque infirmière doit avoir **au moins 10 jours de repos**.
- Pour S1..S4, tout écart δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{1000}$.
- (S5) Chaque infirmière doit avoir **au plus 13 jours de repos**. Tout excès δ est pénalisé d'un coût $\delta \times \mathbf{100}$.
- (S6) Chaque infirmière doit avoir **au moins 1 dimanche de repos**. Toute violation est pénalisé d'un coût **1000**.

Modélisation

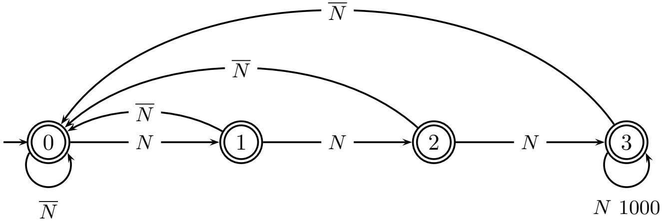
(S1..5) $\forall i \in I$, $\Sigma-\texttt{Gcc}([X_1^i, \ldots, X_{28}^i], [\mathbf{5}, \mathbf{5}, \mathbf{2}, \mathbf{10}], [\mathbf{8}, \mathbf{8}, \mathbf{4}, \mathbf{13}], [\mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}], [\mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{1000}, \mathbf{100}], \mathbf{Z_i^\alpha})$.

(S6) $\forall i \in I, \Sigma-\texttt{Atleast}([X_7^i, X_{14}^i, X_{21}^i, X_{28}^i], O, 1, 1000, Z_i^\beta)$.

Règles de séquence (1/3)

(S7) Chaque infirmière ne doit pas travailler plus de **3 N** consécutives. Tout excès δ est pénalisé d'un coût $\delta \times 1000$.

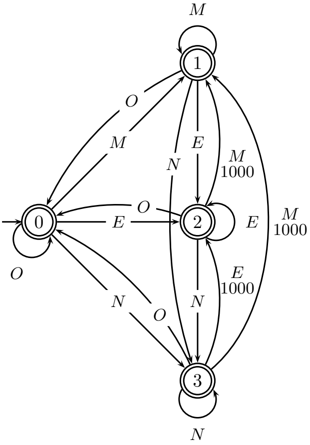
(S7) $\forall i \in I, \texttt{cost} - \texttt{regular}([X_1^i, ..., X_{28}^i], A_1, Z_i^{A1})$.



Règles de séquence (2/3)

(S8) Le changement d'équipes doit s'effectuer en respectant l'ordre suivant : **D** , **E** et **N**. Toute violation est pénalisé d'un coût 1000.

(S8) $\forall i \in I, \texttt{cost} - \texttt{regular}([X_1^i, ..., X_{28}^i], A_2, Z_i^{A2})$.



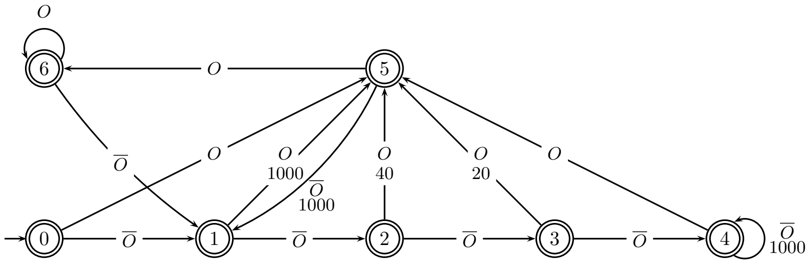
Règles de séquence (3/3)

(S9) Chaque jour de **travail isolé** engendre un coût de **1000**.

(S10) Chaque jour de **repos isolé** engendre un coût de **1000**.

(S11) Le nombre de journées consécutives travaillées est au plus de 4. Tout écart δ est pénalisé d'un coût de $\delta \times 1000$.

(S9..11) $\forall i \in I, \texttt{cost} - \texttt{regular}([X_1^i, ..., X_{28}^i], A_3, Z_i^{A3})$.



Intégralité de la modélisation (Métivier, Boizumault, Loudni, 2009)

- *Variables et domaines*
$\forall j \in [1..28], \forall i \in [1..16], D_j^i = \{M, E, N, O\}$.

- *Contraintes d'équipes*
(H1) $\forall j \in [1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, ..., 24, 25, 26], \mathtt{gcc}([X_j^1, \ldots, X_j^{16}], [4, 4, 2, 0], [4, 4, 2, 16])$.
(H2) $\forall j \in [6, 7, 13, 14, 20, 21, 27, 28], \mathtt{gcc}([X_j^1, \ldots, X_j^{16}], [3, 3, 2, 0], [3, 3, 2, 16])$.

- *Contraintes de charges de travail*
(S1..5) $\forall i \in I, \Sigma{-}\mathtt{gcc}([X_1^i, \ldots, X_{28}^i], [5, 5, 2, 10], [8, 8, 4, 13],$
$[1000, 1000, 1000, 1000], [1000, 1000, 1000, 100], Z_i^\alpha)$.
(S6) $\forall i \in I, \Sigma{-}\mathtt{Atleast}([X_7^i, X_{14}^i, X_{21}^i, X_{28}^i], O, 1, 1000, Z_i^\beta)$.

- *Contraintes de séquence*
(S7) $\forall i \in I, \mathtt{cost}-\mathtt{regular}([X_1^i, ..., X_{28}^i], A_1, Z_i^{A1})$.
(S8) $\forall i \in I, \mathtt{cost}-\mathtt{regular}([X_1^i, ..., X_{28}^i], A_2, Z_i^{A2})$.
(S9..11) $\forall i \in I, \mathtt{cost}-\mathtt{regular}([X_1^i, ..., X_{28}^i], A_3, Z_i^{A3})$.

- *Variable objectif*
$Z = \sum_{i \in I} Z_i^\alpha + Z_i^\beta + Z_i^{A1} + Z_i^{A2} + Z_i^{A3}$

Principales contributions

Point de vue PPC

- Relaxation des contraintes globales `gcc`, `allDifferent` et `regular`,
- Pour chacune, plusieurs sémantiques de violation (cadre avec préférences),
- *Si possible*, ré-utiliser les représentations des contraintes dures,
- Modélisation et Efficacité du filtrage.

Point de vue modélisation et résolution de NRPs

- Approche générique vs les approches ad hoc proposées,
- Modélisation concise et élégante,
- Efficacité de la résolution.

Vers un cadre unique

- **Autre cadre :** les *Weighted* CSP où la violation est gérée par transport de coûts.

- **ANR FiCoLoFo [11..13]** (Filtrage par Cohérences Locales Fortes pour les réseaux de fonctions de coûts)
    - **Objectifs :** Conception de nouveaux algorithmes de filtrage pour cohérences fortes et de nouvelles fonctions de coûts globales,
    - **Partenaires :** UBIA/INRA Toulouse, LIRMM, GREYC.
    - **Apports du GREYC :**
        - Premières fonctions de coûts sur les contraintes globales,
        - Les NRPs constituent l'un des domaines d'application.