

Le modèle relationnel de base de données
Dépendances fonctionnelles

1 - Anomalies d'un schéma relationnel

- Une relation n'est pas correcte si :
 - elle implique des répétitions au niveau de sa population
 - elle pose des problèmes lors des MAJ (insertions, modifications et suppressions)

Livraison	N° Fourn	adrF	N°prod	prixP	qté
	3	Lausanne	52	65	10
	22	Bienne	10	15	5
	22	Bienne	25	10	12
	3	Lausanne	25	10	5
	3	Vevey	10	15	20

- Si un fournisseur change d'adresse et qu'un seul tuple est mis à jour ⇒ **incohérence**
- Si un nouveau tuple est inséré pour un fournisseur connu, avec une adresse différente ⇒ **incohérence**
- Si un fournisseur n'a pas de livraison en cours, son adresse est perdue ...

1 - Anomalies d'un schéma relationnel (suite)

Livraison	N° Fourn	adrF	N°prod	prixP	qté
	3	Lausanne	52	65	10
	22	Bienne	10	15	5
	22	Bienne	25	10	12
	3	Lausanne	25	10	5
	3	Lausanne	10	15	20

- L'adresse du fournisseur ne dépend que du fournisseur et pas du produit.
- Le prix du produit ne dépend que du produit et pas du Fournisseur
- Si un fournisseur n'a pas de livraison en cours, son adresse est perdue ...

⇒ **REDONDANCES**
⇒ **Anomalies de mise à jour**

2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

- L'adresse d'un fournisseur ne dépend que du fournisseur,
⇒ **DÉPENDANCE FONCTIONNELLE (DF)**

Dépendance fonctionnelle :

Soit une relation R (X, Y, Z). Il existe une DF: $X \rightarrow Y$ si et seulement si dans R à une même valeur de X correspond toujours une même valeur de Y.

- $X \rightarrow Y$: X détermine Y Y dépend fonctionnellement de X
- X : source de la DF, Y : cible de la DF
- Dans la relation voiture (NV, Type, Marque, Puissance, Couleur), on a les dépendances fonctionnelles :
 - NV → Couleur
 - Type → Marque
 - Type → Puissance
 - (Type, Marque) → Puissance

2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Propriétés des dépendances fonctionnelles :

- Les dépendances fonctionnelles obéissent à des axiomes appelés « Axiomes de Armstrong »

1 - Réflexivité : $Y \subseteq X \Rightarrow X \rightarrow Y$

Tout ensemble d'attribut détermine lui-même ou une partie de lui-même.

2 - Augmentation : $X \rightarrow Y \Rightarrow (A, X) \rightarrow Y$ (DF non élémentaire)

3 - Transitivité : $X \rightarrow Y$ et $Y \rightarrow Z \Rightarrow X \rightarrow Z$ (DF déduite)

- On ne s'intéresse qu'aux DF élémentaires non déduites.

- Exemple :**

$NV \rightarrow Type$ et $Type \rightarrow Puissance$
alors $NV \rightarrow Puissance$

2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

- Les règles suivantes se déduisent des trois axiomes de base

4 - Union : $X \rightarrow Y$ et $X \rightarrow Z \Rightarrow X \rightarrow YZ$

Preuve : $X \rightarrow Y \Rightarrow XX \rightarrow XY$ (par augmentation) $\Rightarrow X \rightarrow XY$
 $X \rightarrow Z \Rightarrow XY \rightarrow ZY$ (par augmentation)
donc $X \rightarrow YZ$ (par transitivité)

5 - Pseudo-Transitivité : $X \rightarrow Y$ et $WY \rightarrow Z \Rightarrow WX \rightarrow Z$

Preuve : $X \rightarrow Y \Rightarrow WX \rightarrow WY$ (par augmentation), comme $WY \rightarrow Z$
 $\Rightarrow WX \rightarrow Z$ (par transitivité)

6 - Décomposition : $X \rightarrow Y$ et $Z \subseteq Y \Rightarrow X \rightarrow Z$

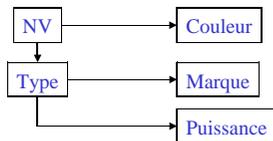
2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

- A partir de ces règles, il est possible d'introduire la notion de dépendance fonctionnelle élémentaire.

Dépendance fonctionnelle élémentaire :

Dépendance fonctionnelle de la forme $X \rightarrow A$ où A est un attribut unique non inclus dans X et où il n'existe pas $X' \subset X$ tel que $X' \rightarrow A$.

Exemple : $F = \{ NV \rightarrow Type; Type \rightarrow Marque; Type \rightarrow Puissance; NV \rightarrow Couleur \}$

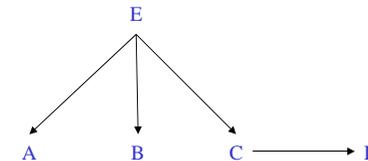


2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

- Graphes des dépendances fonctionnelles**

Pour une relation, il est possible de représenter l'ensemble des DF élémentaires et non déduites sous forme d'un graphe orienté appelé **Graphes minimal des DF de la relation**.

Exemple : $R(A, B, C, D, E)$, avec $DF = \{ E \rightarrow A; E \rightarrow B; E \rightarrow C; C \rightarrow D \}$

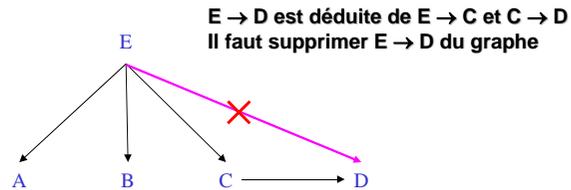


2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Utilité du graphe des DF

- Vérifier que le graphe est bien minimum
- Trouver les identifiants de la relation
- Tester si la relation est bonne (bien normalisée)
- Sinon trouver les décompositions

Exemple d'un graphe non minimal

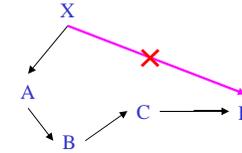


2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Vérifier qu'un graphe est minimum

1. DF déduite

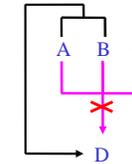
$X \rightarrow D$ est déduite s'il existe un autre chemin $X \rightarrow A_1 \dots \rightarrow \dots \rightarrow A_n \rightarrow D$



8. DF non élémentaire

$X \rightarrow D$ est non élémentaire s'il existe une DF $Y \rightarrow D$ tel que Y est un sous-ensemble des attributs de X

$(A,B,C) \rightarrow D$ est non élémentaire

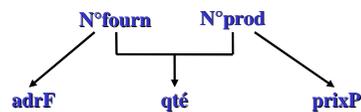


2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Graphe de DF de la relation Livraison

Livraison ($N^{\circ}fourn$, $adrF$, $N^{\circ}prod$, $prixP$, $qté$)

- $N^{\circ}fourn \rightarrow adrF$
l'adresse d'un fournisseur ne dépend que du fournisseur
- $N^{\circ}prod \rightarrow prixP$
le prix d'un produit ne dépend que du produit
- $(N^{\circ}fourn, N^{\circ}prod) \rightarrow qté$
la quantité livrée dépend du produit et du fournisseur
- [faux : $N^{\circ}fourn \rightarrow qté$, $N^{\circ}prod \rightarrow qté$]



2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

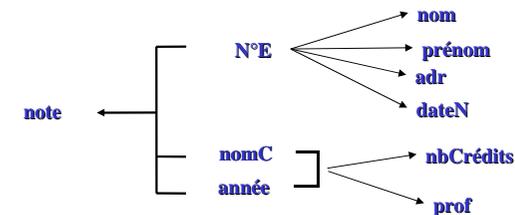
Exemple:

R ($N^{\circ}E$, nom , $prénom$, adr , $dateN$, $nomC$, $année$, $nbCrédits$, $prof$, $note$)

Règles de gestion :

- L'étudiant ($N^{\circ}E$) a obtenu telle année tel cours ($nomC$) avec telle note.
- Cette année là le cours était sous la responsabilité de tel prof et valait tant de crédits ($nbCrédits$).

Faire le graphe minimal des DF



2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

- En utilisant la concept de dépendance fonctionnelle, on peut définir plus formellement la notion de clé primaire.

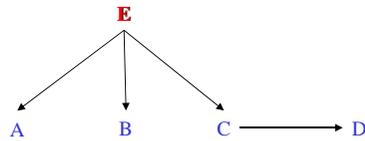
Clé primaire (identifiant) d'une relation :

La clé primaire d'une relation est l'ensemble (minimal) des nœuds du graphe minimal à partir desquels on peut atteindre tous les autres nœuds (via les DF)

Une clé primaire est cas particulier de DF sur $R : X \rightarrow A_1, A_2, \dots, A_n$.

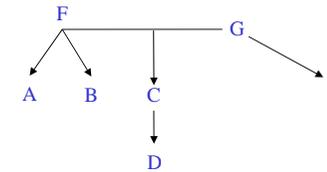
Ces DF sont implicites.

- Exemple: $R(A, B, C, D, E)$



2 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

- Autre exemple: $R(A, B, C, D, E, F, G)$



- (F, G) est la clé primaire de R**

3 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Fermeture transitive d'un ensemble d'attributs

Fermeture transitive d'un ensemble d'attributs:

La fermeture transitive d'un ensemble d'attributs X par rapport un ensemble de DF F s'obtient par application des règles d'inférences de F à X.

$$X^{+F} = \{ A \mid X \rightarrow A \in F \}$$

Exemple :

$F = \{ NV \rightarrow Type; Type \rightarrow Marque; Type \rightarrow Puissance; NV \rightarrow Couleur \}$

$(Type)^{+F} = \{ Type, Marque, puissance \}$

Fonction **Fermeture-Attributs** (X, F) : $X^+ F$

Début

$Y \leftarrow X$; /* par réflexivité */

tant que $(\exists G \rightarrow D \in F \mid G \subseteq Y)$ faire

$Y \leftarrow Y \cup D$;

fin tant que

Fin

3 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Algorithme DF élémentaires

Fonction **DF-Élémentaires**($X \rightarrow A, F$) : $X' \rightarrow A$
élémentaire;

Début

$Y \leftarrow X$;

Pour $X_i \in X$ faire

si $A \in (Y - \{X_i\})^+$

alors $Y \leftarrow Y - \{X_i\}$

Fin-pour

Retourner $(Y \rightarrow A)$

Fin

DF élémentaires - Exemple

Soit $F = \{A \rightarrow D, B \rightarrow D, ABC \rightarrow E, D \rightarrow E\}$ un ens. DF.

- La DF $ABC \rightarrow E$ n'est pas élémentaire.
 - Par application **DF-Élémentaires(f)**, f se ramène soit à $A \rightarrow E$, soit à $B \rightarrow E$.
 - Nous obtenons donc :
 $F' = \{A \rightarrow D, B \rightarrow D, A \rightarrow E, D \rightarrow E\}$

Algorithme DF irredondantes

Fonction **Éliminer-DF-Redondantes (F)** : $F' | F' \subseteq F \wedge F' \equiv F$;

Début

$F' \leftarrow F$;

Pour tout $f :: X \rightarrow A \in F$ faire

si (f est déductible à partir de $F - \{f\}$)

alors $F' \leftarrow F' - \{X \rightarrow A\}$

Fin-pour ;

Retourner F'

Fin

DF irredondantes - Exemple

Soit $F = \{A \rightarrow D, B \rightarrow D, ABC \rightarrow E, D \rightarrow E\}$ un ens. de DF.

- La DF $f :: ABC \rightarrow E$ n'est pas élémentaire.
 - Par application **DF-Élémentaires(f)**, f se ramène soit à $A \rightarrow E$, soit à $B \rightarrow E$.
 - Nous obtenons donc :
 $F' = \{A \rightarrow D, B \rightarrow D, A \rightarrow E, D \rightarrow E\}$
- La DF $A \rightarrow E$ est redondante. En effet, elle peut être obtenue par transitivité de $A \rightarrow D$ et $D \rightarrow E$.
 - Nous éliminons $A \rightarrow E$ de l'ensemble de DF F'

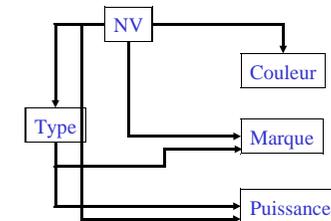
Fermeture transitive d'un ensemble de DF

- A partir d'un ensemble de DF élémentaires, on peut composer par transitivité d'autres DF élémentaires. On aboutit ainsi à la notion de fermeture transitive d'un ensemble F de DF élémentaires.

Fermeture transitive d'un ensemble de DF:
 Ensemble des DF élémentaires considérées enrichi de toutes les DF élémentaires déduites par transitivité.

Exemple :
 $F = \{NV \rightarrow Type; Type \rightarrow Marque; Type \rightarrow Puissance; NV \rightarrow Couleur\}$

On en déduit la fermeture transitive
 $F^+ = F \cup \{NV \rightarrow Marque; NV \rightarrow Puissance\}$



Exemple de fermeture transitive

3 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Couverture minimale

Equivalence de deux ensembles de DF élémentaires :

Deux ensembles de DF élémentaires sont équivalents s'ils ont la même fermeture transitive.

Couverture minimale :

Ensemble F de DF élémentaires associé à un ensemble d'attributs vérifiant les propriétés suivantes :

- 1 - Aucune dépendance dans F n'est redondante ; c'est à dire, pour toute DF f de F, F - f n'est pas équivalent à F;
- 2 - Toute DF élémentaire des attributs est dans la fermeture transitive F⁺ de F. La couverture minimale n'est en général pas unique.

- C'est en quelque sorte le sous-ensemble minimum de DF permettant de générer toutes les autres.

1 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Algorithme de calcul d'une Couverture minimale

Fonction Couverture-Minimale(F) : F' | F' ⊆ F ∧ F' ≡ F ;

Début

F' ← ∅ ;

Pour tout X → Y ∈ F faire

Pour tout A ∈ Y faire

si A ∉ X alors

F' ← F' ∪ { DF-Élémentaire(X → A, F) };

Fin-pour

Fin-pour;

F' ← Éliminer-DF-Redondantes(F') ;

Retourner F'

Fin

3 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Couverture minimale - Exemple

Soit F = {A → D, B → D, ABC → E, D → E} un ensemble de DF.

- La DF ABC → E n'est pas élémentaire.
 - Par application DF-Élémentaires(f), f se ramène soit à A → E, soit à B → E.
 - Nous obtenons donc F' = {A → D, B → D, A → E, D → E}
- La DF A → E est redondante. En effet, elle peut être obtenue par transitivité de A → D et D → E.
 - Nous éliminons A → E de l'ensemble de DF F'
- {A → D, B → D, D → E} constitue une couverture minimale de l'ensemble F

3 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

Couverture minimale

Exemple :

F = { NV → Type; Type → Marque; Type → Puissance; NV → Couleur }

est une couverture minimale pour l'ensemble des dépendances fonctionnelles de la relation Voiture

- La couverture minimale est essentiel pour décomposer les relations sans perte d'informations

3 - La conception de schéma relationnel - Dépendances fonctionnelles

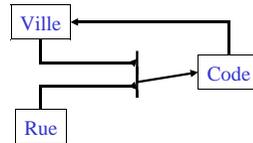
- Pas toujours possible de représenter les DF d'une relation par un graphe simple; cas où la partie gauche d'une DF comporte plus d'un attribut.
- Il faut introduire des arcs représentant une association de plusieurs sommets vers un sommet.

Exemple :

Code Postal (Code, Ville, Rue) comporte les dépendances fonctionnelles

(Ville, Rue) → Code

Code → Ville



Réseau de dépendances fonctionnelles